SITZUNG VOM 4. FEBRUAR 1858.

Vorträge.

Über Herrn Spitzer's Abhandlung: Die Integration mehrerer Differential-Gleichungen betreffend, und die darin erhobenen Prioritäts-Ansprüche.

Von dem w. M. Prof. J. Petzval.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 3. December 1857.)

Herr Simon Spitzer hat in der Sitzung vom 22. Mai 1857 der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften eine Abhandlung über die Integration mehrerer Differentialgleichungen überreicht und sie wurde noch am selben Tage, bevorwortet von dem wirklichen Mitgliede Herrn Regierungsrath von Ettingshausen, der die volle Kenntniss ihres Inhaltes zu haben erklärte, aufgenommen in die Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe. Indem ich nun das erste Heft des 15. Bandes, das diese Abhandlung enthält und vor Kurzem die Presse verlassen hat, zur Hand nehme, gewahre ich zu meinem Erstaunen sehr heftige Angriffe auf meine Person; ich werde mit einem Worte des literarischen Diebstahls beschuldigt. Eine meiner Integrationsmethoden in Form eines bestimmten Integrales sei nicht von mir, sondern von Laplace gefunden, ja noch mehr, ich hätte ein Plagiat verübt nicht nur an Laplace, sondern auch an Herrn Spitzer, und dies ist durch eine gewisse verblümte Insinuation kundgegeben, die so lautet, als ob sich dies schon öfter und jetzt wieder ereignet hätte.

Die Anklage ist offenbar eine sehr schwere; zwar hat es nicht viel zu bedeuten, wenn Jemand von den Entdeckungen Laplace's Gebrauch macht, oder durch eigenes Nachdenken zu etwas kommt,

was dieser grosse Mann auch schon gehabt hat; allein wenn ein alter, im Dienste der Wissenschaft ergrauender Gelehrter, der ein Paar grosse Wissenschaften beinahe von der Grundfeste bis an den Gipfel ausgebildet hat, einem armen Anfänger, der ohnehin wenig oder gar nichts sein nennen kann, dieses wenige wegnimmt, so hat der Reiche den Armen bestohlen; und wenn der Lehrer das Eigenthum seines Schülers sich zuschreibt, so ist dies eben so viel, als wenn der Vater seinen Sohn beraubt hätte.

Hiezu kommt noch, dass diese schwere Anklage nicht nur abgedruckt erscheint in den Sitzungsberichten, sondern Herr Spitzer hat nur auf dringende Aufforderung des Herrn Regierungsrathes von Ettingshausen diese Arbeit der Wiener Akademie vorgelegt. „Dringend aufgefordert", das sind die Worte Spitzer's, und zwar nachdem er dem würdigen Mitgliede das Manuscript zur Einsicht mitgetheilt hatte. Dieser Umstand gibt nun der Anklage offenbar ein besonderes, vermehrtes Gewicht, denn sie geht in Folge dessen nicht mehr von Herrn Spitzer aus, sondern von meinem verehrten Herrn Collegen, und hat für mich die Kraft einer dringenden Aufforderung vor demselben Areopage, vor welchem ich verklagt worden bin, der kaiserlichen Akademie nämlich, meine Vertheidigung zu führen und die ungerechten gegen mich erhobenen Anschuldigungen zurückzuweisen.

Als festgestellte Thatsache ist anzunehmen, dass Herr Spitzer und ich geschrieben haben über einerlei Gegenstand. Die Priorität kann daher nur entweder Herrn Spitzer, oder mir, oder keinem von beiden gebühren. Wenn ich daher nachweisen kann, dass in dem vorgelegten Memoire gar nichts Herrn Spitzer angehöre, bis auf dasjenige, was entweder dem Inhalte, oder der Form nach unrichtig ist, oder werthlos, und dass alles andere eher mein als Herrn Spitzer's Eigenthum sei: so ist offenbar der volle Beweis der Ungerechtigkeit der gegen mich erhobenen Anklage geliefert. Ich kann daher bei der Unbestimmtheit der Anklage nichts anderes thun, als die Arbeit meines Herrn Gegners Punkt für Punkt vornehmen und das, was Herrn Spitzer eigenthümlich angehört, von demjenigen, was wahrscheinlich mein oder Anderer Eigenthum ist, absondern, indem ich haarklein angebe, in welchem Buche dieses Letztere zu finden sei und auf welcher Seite, und zwar in einem Werke, das Herrn Spitzer nach seinem eigenen Geständnisse bekannt ist.

Die Abhandlung, von welcher die Rede ist, fängt an mit den Worten: „Obige Differentialgleichung war in letzter Zeit Gegenstand der Untersuchungen Petzval's, die derselbe in seinem Werke über die Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coëfficienten, von welchem gegenwärtig vier Lieferungen erschienen sind, niederlegte.“ Herr Spitzer gesteht hier selbst, dass er vier Lieferungen meines Werkes kannte, als er seine Abhandlung der kaiserlichen Akademie übergab; ich kann mich daher auf den Inhalt dieser vier Lieferungen berufen, als eine der Spitzer'schen vorangegangene Arbeit. Herr Spitzer fährt fort: „Ich habe mich vor Kurzem mit der Integration derselben Gleichung beschäftigt und bin durch eine glückliche Anwendung der von Liouville im 13. Livre des *„Journal de l'école polytechnique“* bei Gelegenheit der Integration der Gleichung:

$$(mx^2+nx+p)\frac{d^2y}{dx^2}+(qx+r)\frac{dy}{dx}+sy=0$$

gebrauchten Methode zu höchst einfachen Formeln gelangt, mittelst welcher das Integrale obiger Gleichung fast augenblicklich angegeben werden kann. Es war mir alsdann ein Leichtes, die Methode auf die Integration von Differenzen- und Differentialgleichungen höherer Ordnungen mit Coëfficienten der Form $a+bx$ auszudehnen.“

Man muss sich hier nicht vorstellen, dass die sogenannte „glückliche Anwendung“ der Liouville'schen Methode etwa ein scharfsinniger Gedanke Spitzer's sei. Ein jeder meiner Schüler oder Leser, der nur eingedrungen ist in die Anfangsgründe der Formenlehre, hat schon eo ipso dasselbe Glück, nur mit dem Unterschiede, dass er von der Methode Liouville's einen zweckmässigen Gebrauch machen wird und nicht, wie Herr Spitzer, sie missbrauchen; denn meine Gleichung und zugleich jene, welche Herr Spitzer hier zum Gegenstande seiner Rechnungen macht, ist folgende:

$$(a_2+b_2x)\,y''+(a_1+b_1x)\,y'+(a_0+b_0x)\,y=0.$$

Setzt man in ihr $b_0=0$, so fällt sie alsogleich in die Form der Liouville'schen und ist von ihr ein specieller Fall. Wie man nun durch Transformation diesen Coëfficienten verschwinden lassen kann, indem man eines der particulären Integrale von seinem exponentiellen Factor befreit und dadurch zur ersten Functionsclasse herabsetzt;

wie sich dies im Allgemeinen bei einer jeden Differentialgleichung thun lässt und zwar auf so viele verschiedene Arten, als die Ordnungszahl der Differentialgleichung Einheiten in sich enthält, wie jedesmal der nothwendige Erfolg ein Abfall um mindestens eine Einheit in der Gradzahl vom vorletzten auf den letzten Coëfficienten sein muss, ist in meinem Werke II. Bd., IV. Abschnitt, §. 2, S. 24—51, genau und umständlich angegeben, und als eine sehr wichtige Transformation, durch die man in der Regel das Integriren vorbereitet, an vielen Stellen meines Buches in Erwähnung gebracht. Also nicht Herr Spitzer, sondern ich war so „glücklich", die Regeln anzugeben, nach denen er sich im Rechnen übt, und er war nur so „glücklich", seine Rechnenproben in die Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu bringen.

In den folgenden Zeilen lässt Herr Spitzer, mit den Worten angehend: „Ich bilde den Bruch", eine gebrochene Function wie vom Himmel fallen, ohne zu sagen, woher er ihn beziehe. Hierdurch wird schon im vorhinein seine Abhandlung unverständlich, für alle diejenigen wenigstens, die mein Werk über die Integration der Differentialgleichungen nicht kennen. Ich bemerke daher hier ergänzungsweise, dass die volle Bedeutung und Bildungsart dieses Bruches in meinem Werke I. Bd., S. 75 allgemein angegeben sei und dass derselbe ganz ungeänderte Bruch sich noch überdies auf S. 43 vorfinde. Es nimmt also Herr Spitzer zu seinem Integrationsgeschäfte von meiner Integrationsmethode den Anlauf. Ich sage: „von meiner Integrationsmethode", weil es mindestens vorderhand noch unerwiesen ist, dass sie jemandem Anderen, z. B. Laplace, angehöre. Er folgt Schritt für Schritt meinen an dieser Stelle zu ersehenden Rechnungen und braucht sogar dieselben Zeichen, mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass er eine Constante, die bei mir A' heisst, mit B benennt. Nach Einführung dieser neuen Zeichen schreitet er zu Substitution:

$$y = e^{\alpha x} z$$

und sagt weder woher er sie habe, noch zu welchem Ende er sie vornehme. Über beides findet man Aufschluss und umständliche Belehrung in meinem Werke und zwar in den §§. 4—6 der Formenlehre, ferner §. 2 der Transformationslehre, wo dieselbe Substitution

$$y = e^{\int \varphi dx} z$$

mit ihrer Wirkung allgemein für eine jede Differentialgleichung angegeben ist, die der Gradzahl nach gleich hohe und höchste Coëfficienten hat. Endlich ist §. 9 der Transformationslehre die Substitution ganz allgemein bei einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit beliebigen Coëfficienten durchgeführt. Ich bin es also, der eine erschöpfende Theorie dieser sowohl, wie auch anderer ähnlicher Transformationsweisen geliefert hat. Ich sage eine erschöpfende, und gerundete Theorie, der man es auf den ersten Blick ansieht, dass sie das Werk sei einer längeren Zeit und vermuthlich schon vorhanden, als Herr Spitzer an das Integriren überhaupt noch gar nicht dachte, und so ist es im Wesentlichen auch.

Nachdem Herr Spitzer auf diese Weise mit einer Transformationsmethode, die mir wenigstens ihre volle Ausbildung verdankt und die ich desshalb als mein, wenigstens gegenüber der gegen mich erhobenen Anklage, in Anspruch nehme, wobei ich aber ausdrücklich bemerke, dass ich dies unter anderen Umständen nicht thun würde, indem ich weiss, dass diese Substitution schon vor mir von vielen Mathematikern geübt worden ist; allein trotzdem, dass ich dies zugebe, so nenne ich sie dennoch mein, weil ich der erste war, der ihren Zweck und ihre Wirkung mit Präcision angegeben hat: Herabsetzung nämlich eines particulären Integrales zur ersten Functionsclasse, und es muss dies auch Jedem, selbst Nichtmathematiker, klar sein, wenn er bedenkt, dass ich der erste war, der die Functionen anstatt in algebraisch und transcendent zweckmässiger in Classen einzutheilen vorgeschlagen habe, und dass man vor mir von einer solchen Eintheilung der Functionen und ihrem Nutzen gar nichts wusste.

Nachdem also Herr Spitzer nach meiner Methode transformirt hat, betritt er den von Liouville im Journal *de l'école polytechnique* eingeschlagenen Weg, und gelangt natürlich zu einer Integralformel, die in der im Bd. XIII, S. 181 dieses Journals angegebenen enthalten ist als specieller Fall. Also auch diese Formel, die Herr Spitzer unter (5) anführt, ist nicht sein Eigenthum, sondern das Liouville's.

Der Verfasser fährt fort: „Wir können, bevor wir weiter gehen, folgende Bemerkung nicht unterdrücken u. s. w. Mathematiker sprechen in ihren Werken gern in der vielfachen Zahl, aber nicht von ihrer eigenen Person, sondern sie geben sich gerne

der Illusion hin, dass sie bei ihren mühevollen Schlussfolgerungen den Leser zum Gefährten haben, welchem gegenüber, die grösstmögliche Klarheit zu entfalten, sie für eine Pflicht halten. Ich nehme demgemäss auch hier an, dass Herr Spitzer nicht von seiner eigenen Person, sondern von sich und seinen Lesern spreche. Letzterer bin ich gegenwärtig. Aber ich kann hier wirklich nicht begreifen, warum wir beide in gegenseitigem Einverständnisse eine fremde Bemerkung, die Liouville gemacht hat, in demselben Bande des *Journal de l'école polytechnique* und die er dort ausführlich begründet hat, nicht unterdrücken können. Wesshalb liegt denn also diese Bemerkung Herrn Spitzer so schwer auf dem Herzen, dass er sie nicht unterdrücken kann? Vielleicht will er mich, den Leser, dadurch nur aufmerksam und vorsichtig machen bei dem Gebrauche von Formen, wie Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl. Nun ich habe mich auch der grössten Aufmerksamkeit beflissen, und habe drei Seiten weiter gefunden, dass Herr Spitzer nicht nur die ganze Bemerkung, die er „nicht unterdrücken konnte", rein vergessen, sondern sogar die einem jeden Schüler bekannte Integrationsconstante ausser Acht gelassen hat. Ich kann indessen in seiner Abhandlung nichts überspringen und muss also später auf diesen Punkt zurückkommen. Nachdem also Herr Spitzer die Bemerkung Liouville's gemacht und sie in seiner Weise verwerthet hat, geht er über zur Erörterung der verschiedenen speciellen Fälle, Schritt für Schritt meinen Fussstapfen folgend, und gelangt dadurch zu Formeln auf Seite 35 seiner Abhandlung, von denen die erste auf Seite 79 meines Werkes, die zweite an eben der Stelle zu finden ist. Endlich folgt ungefähr in der Mitte von Seite 35 eine Äusserung, die Herrn Spitzer eigenthümlich ist. Er spricht nämlich: „Ist daher $\frac{a}{2}$ keine ganze Zahl, so ist das eben in Reihenform gefundene y unbrauchbar, und man muss, um eine brauchbare Reihe zu erhalten, y auf andere Art entwickeln." Nun entwickelt er wirklich anders und es folgen sechs Seiten, auf deren Inhalt ich keinen Anspruch erhebe, weder für mich, noch für jemanden Anderen, denn weder ich, noch sonst ein gediegener Mathematiker würde so etwas haben drucken lassen.

Die Rede ist von einer Reihe, die zur Classe der sogenannten halbconvergirenden gehört, d. h. man nähert sich, mehr und mehr Anfangsglieder zusammennehmend, anfänglich dem wahren Werthe

der Function, welche dieselbe darstellen soll, immer mehr; dann aber später entfernt man sich von ihm wieder. Diese ist es, die Herr Spitzer für „unbrauchbar" erklärt. Ich erwidere darauf: Ich und mehrere berühmte Analysten vor mir haben sie gebraucht und brauchbar gefunden.

Reihen sind eines der wirksamsten analytischen Hilfsmittel, und haben bisher das Schicksal gehabt aller grossen wissenschaftlichen Werkzeuge: erst überschätzt, dann theilweise unterschätzt, sind sie gegenwärtig daran, in gehöriger Weise gewürdigt zu werden. Nachdem man mit ihrer Hilfe trigonometrische und Logarithmen-Tafeln construirt hatte, fand man, dass sie bei unvorsichtigem Gebrauche zu Irrthümern verleiten und Letzteres namentlich dann, wenn sie divergiren. Nun waren die grössten mathematischen Geister Europa's, wie Gauss, Cauchy, damit beschäftigt, Kennzeichen der Convergenz oder Divergenz aufzustellen und es wurde der convergirenden Reihe allein das Recht zugesprochen, die Functionen zu repräsentiren und die divergirende davon ausgeschlossen, bis endlich Cauchy selbst die Bemerkung machte, dass überhaupt gar keine unendliche Reihe, weder eine convergirende, noch eine divergirende, als der sichere Repräsentant einer Function angesehen werden könne, weil es Functionen gibt, von denen sämmtliche Glieder der aufsteigenden Reihenentwickelung verschwinden. Wenn man daher in irgend einer Rechnung die Function y einer Variablen x etwa erhielte in der folgenden wohlbekannten Form:

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.5} = \dots$$

so kann man nicht mit Gewissheit sagen, dass $y = \sin x$ sei, weil es noch eine unendliche Menge anderer Functionen gibt, denen dieselbe Reihenentwickelung zukommt, z. B.

$$y = \sin x + e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$y = \sin x + e^{-\frac{k^2}{x^4}}$$

u. s. w. Diese Bemerkung Cauchy's hat besonders auf dem Felde der Integration der Differenzialgleichungen Werth, weil sich derlei Formen in den Integralen nicht selten nachweisen lassen. Die hier angeführten sind z. B. jedesmal im Integrale vorhanden, wenn der

erste Coëfficient der Differentialgleichung den Factor x^3 oder x^5 besitzt.

Was soll man also gegenwärtig anfangen? Die divergirenden Reihen können mitunter zu einem Irrthume verleiten, aber die convergirenden auch. Will man alle Reihen exiliren, so hat man die ganze Mathematik aufgehoben. Ich antworte mit der Gegenfrage: Was thut der kluge Inhaber einer Werkstätte, wenn sich einer seiner Arbeiter aus Ungeschicklichkeit mit einem scharfen Werkzeuge verletzt hat? Schafft er etwa alle scharfen Werkzeuge ab? Die Antwort liegt auf der Hand; sie lautet: Nein, denn wer ungeschickt ist, kann sich auch mit einem stumpfen Werkzeuge verletzen. Er wird daher lieber seinen Leuten die gehörigen Vorsichten einprägen, und hierin liegt auch der wahre Begriff der mathematischen Strenge. Ich habe also, wie gesagt, die halbconvergirende Reihe, die Hr. Spitzer nicht brauchen kann, nebst ihren ähnlich gestalteten Schwestern unter den gehörigen Vorsichten brauchbar gefunden und wenn erst die fünfte Lieferung meines Werkes erschienen sein wird, hoffe ich, dass auch Herr Spitzer in mehreren Beispielen diese Brauchbarkeit entweder anerkennen oder neu erfinden wird. Aber, welche ist denn jetzt die Form, welche Herr Spitzer anstatt der angeblich unbrauchbaren setzt? Sie ist die folgende:

$$\begin{aligned} y = C_1\, e^{bx} \Bigg\{ & \frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + 2b \binom{\frac{a}{2}-1}{1} \frac{d^{\frac{a}{2}-2}}{dx^{\frac{a}{2}-2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + \\ & + 4b^2 \binom{\frac{a}{2}-1}{2} \frac{d^{\frac{a}{2}-3}}{dx^{\frac{a}{2}-3}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + \ldots \Bigg\} \\ + C_2\, e^{-bx} \Bigg\{ & \frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) - 2b \binom{\frac{a}{2}-1}{1} \frac{d^{\frac{a}{2}-2}}{dx^{\frac{a}{2}-2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + \\ & + 4b^2 \binom{\frac{a}{2}-1}{2} \frac{d^{\frac{a}{2}-3}}{dx^{\frac{a}{2}-3}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + \ldots \Bigg\} \end{aligned}$$

Von diesen Reihen beweist nun Herr Spitzer, dass sie convergiren. Er hat die Bemerkung Liouville's, die er früher „nicht

unterdrücken konnte“ ganz vergessen, sowohl bei der Aufstellung der Reihe, wie bei dem Beweise der Convergenz; er hat ganz vergessen, dass jedem Gliede seines Integrales eine unendliche Reihe mit unbekannten Coëfficienten, von deren Werth man Nichts weiss, als *fonction complémentaire* zugesetzt werden muss. Er beweist also, dass eine Reihe von man weiss nicht was, convergire und vergisst sogar im Laufe des Beweises auf die anzuhängende Integrationsconstante. Der Form nach ist dieser Beweis ganz und gar verfehlt; er führt aber dennoch zu einem richtigen Resultate, was jedoch kein Verdienst Herrn Spitzer's ist, sondern den Grund hat in einer allgemeinen Wahrheit, die die Geltung eines Naturgesetzes besitzt, nämlich: Die durch Integration einer Differentialgleichung gewonnenen aufsteigenden Reihen convergiren immer, was auch die Form oder Ordnungszahl der Gleichung sein mag und zwar entweder für unbegrenzte oder mindestens für begrenzte Werthe der Grösse $x-\alpha$, nach deren aufsteigenden Potenzen dieselben geordnet sind. Wenn $x-\alpha$ kein Factor ist des ersten Gleichungscoëfficienten, so findet man den Beweis dieses importanten Satzes Seite 6 meines Werkes über die Integration der Differentialgleichungen, allwo er mit dem Existenzbeweise des Integrales in Eines zusammenfliesst. Unter der Voraussetzung, das $x-\alpha$ unter den Factoren des ersten Coëfficienten vorkommt, der sich als der praktisch wichtige herausgestellt hat, weil nur dann das aufsteigende Integriren von Nutzen sein kann, ist der Convergenzfrage höhere Aufmerksamkeit geschenkt worden. In der vierten Lieferung nämlich S. 344 u. s. w. ist nicht nur der allgemeine auf alle Differentialgleichungen ausgedehnte Beweis geliefert, dass die gewonnenen aufsteigenden Reihen convergiren, sondern es wird auch die Art und Weise, oder der Grad ihrer Convergenz festgestellt. Sie ist nämlich die einer Asymptote des Integrales, die in aufsteigender Reihenform gedacht werden muss, entsprechende. Wer also mein Werk studirt hat und die Gleichung, von welcher Spitzer spricht, nur ansieht, der spricht alsogleich folgendermassen: Ich sehe, dass die exponentiellen Asymptoten der zwei particulären Integrale e^{bx} und e^{-bx} sind. Entwickle ich direct das Integral in aufsteigender Reihenform, so muss ich zwei Reihen gewinnen, welche in den späteren Gliedern dieselbe Art der Convergenz aufweisen, wie die Reihen für die Exponentialgrössen e^{bx} und e^{-bx}. Multiplicire ich hingegen zuvörderst mit irgend einem

dieser beiden exponentiellen Factoren, wie dies Herr Spitzer vermöge der gemachten Substitution gethan, so verwandeln sich die Asymptoten entweder in e^{2bx} oder e^{-2bx}. Ich muss mithin Reihen erhalten, die in den späteren Gliedern ein Mal wie diejenige für die Exponentielle e^{2bx}, ein ander Mal, wie die für e^{-2bx} convergiren. Ein jeder meiner Schüler gelangt also, ohne auch nur einen Bleistift anzurühren, schon beim Anschauen der Gleichung zu demselben Ergebnisse, zu welchem Herr Spitzer mühselig mit einem mangelhaften Beweise kommt; und dies zwar nicht nur bei der in Rede stehenden Differentialgleichung, sondern allgemein bei einer jeden beliebigen durch das wohlbekannte Verfahren der Zerlegung eines oder mehrerer algebraischer Polynome in einfache Factoren.

Ein jeder meiner Schüler sieht aber noch überdies, dass Herr Spitzer hier einen grossen Missgriff gemacht hat; durch eine Transformation nämlich, die verständig angewendet, in vielen Fällen nützlich ist, aber hier ganz zweckwidrig erscheint, hat er sich sein Rechnungsresultat verderbt, ohne davon kraft seines Beweises auch nur das Geringste gewahr zu werden. Hätte er ohne Transformation die Differentialgleichung aufsteigend integrirt, so hätte er Reihen erhalten, die convergiren, wie die für e^{+bx} und e^{-bx}. Weil er aber transformirt hat, so erhält er andere Reihen, die nur, wie jene für e^{+2bx} und e^{-2bx} convergiren, also weit minder als die früheren, und so, dass er gerade zwei Mal so viele Anfangsglieder zählen muss, bis die seinigen auch nur zu convergiren anfangen.

Ein einsichtsvoller Rechner wird sogar in dem Bestreben, sich die vortheilhafteste aufsteigende Reihe zu verschaffen, noch weiter gehen; er wird sagen, wenn man Reihen erhalten kann, die wie e^{bx} und e^{-bx} convergiren, so wird man auch zu noch convergenteren Reihen gelangen, so nämlich, wie $e^{bx} + e^{-bx}$ und $e^{bx} - e^{-bx}$, oder beiläufig wie $\sin b\,x$ und $\cos b\,x$ und wird nun darauf losgehend derselben auch wirklich theilhaftig werden.

Wir hätten also beide, Herr Spitzer und ich, die Convergenz der aufsteigenden Reihen bewiesen; zwischen den beiderseitigen Beweisen jedoch waltet ein gar grosser Unterschied, der nämlich zwischen falscher und wahrer Wissenschaft. Es sei mir erlaubt, die Parallele etwas ausführlicher zu ziehen.

Herr Spitzer beweist die Convergenz der aufsteigenden Reihe, die man bei der Integration der folgenden Gleichung erhält:

$$xy'' + ay' - b^2xy = 0,$$

welche Gleichung ein sehr specieller Fall ist von der am Eingange der Abhandlung sich befindenden:

$$(a_1 + b_1x)\,y'' + (a_2 + b_2x)\,y' + a_0 + b_0x = 0,$$

welche letztere wieder nur ein winziger Tropfen ist in dem grossen Oceane der Differentialgleichungen.

Wohl hat es jemals eine Zeit gegeben, wo solche Specialitäten in dritter Potenz noch dankenswerth waren, weil man bei dem totalen Mangel an Integrationsmethoden nicht wissen konnte, ob nicht vielleicht in einem anscheinend geringfügigen Kunstgriffe der Keim zu einer solchen verborgen liege. Aber jetzt, wo wir für alle Fälle ausreichende Verfahrungsarten besitzen, hat die Integration einer speciellen Differentialgleichung, die sonst kein Verdienst hat, als sich eben integriren zu lassen, wenn sie auch noch so gut gelingt, offenbar nur mehr den Werth eines Schülerelaborates und ist weiter kein akademischer Gegenstand, und derjenige, der sich auf derlei Aphorismen verlegt, trägt nicht nur gar nichts zum Gedeihen der Wissenschaft bei, sondern entfaltet mit den in gleicher Richtung thätigen Genossen, vielleicht ohne dass er es weiss, nur ein Bestreben das edle und gediegene Wissen unter einer Last werthloser Maculatur zu vergraben. Sollte jemals die Wissenschaft wieder in diesem Welttheile untergehen, so kann dies auf keine andere als auf diese Weise geschehen, indem man an die Stelle derselben ein Truggebilde setzt, welches zwar wie Wissenschaft aussieht, es aber nicht ist.

Nachdem Herr Spitzer seinen Beweis geschlossen, fährt er fort, die Differentialgleichungen, die ich als Beispiele benützt habe, unerbittlich abzumergeln, so dass es beinahe den Anschein gewinnt, als wollte er mir zeigen, wie ich es hätte machen sollen. Dies erscheint um desto wahrscheinlicher, wenn man folgende Worte Herrn Spitzer's erwägt. Er sagt, und zwar gedruckt in einem Blatte der Presse: „Wenn es sich aber nicht um die Form, sondern um den Inhalt einer Arbeit handelt, dann steht es wenigstens dem Herrn Professor Petzval übel an, darüber mit Geringschätzung die Achsel zu zucken, ihm, der seit 11 Jahren an der Herausgabe eines mehr-

bändigen Werkes arbeitet, dessen wesentliche Mängel und Unrichtigkeiten nachzuweisen ja einer der Hauptzwecke meiner bescheidenen Abhandlung war."

Die Mängel, von denen hier Herr Spitzer spricht, bestehen vermuthlich darin, dass ich es nicht wie er gemacht habe. Nun, ich gebe sehr gerne darüber Rechenschaft, warum ich gerade so gethan und nicht anders. Hr. Spitzer wird hier einen zweiten Unterschied zwischen wahrer und falscher Wissenschaft kennen lernen. Er wird erfahren, dass es feststehende logische Regeln eines wissenschaftlichen Baues gibt, z. B. die folgende Lehre.

Wenn man ein neues Werkzeug der Wissenschaftsforschung, z. B. eine Integrationsmethode, gefunden hat, so hat man sie durch eine sorgfältige Untersuchung auf ihre Tragweite zu erproben, denn da auch hier das: *non omnia possumus omnes* als allgemeine Wahrheit gilt, so wird es stets Fälle geben, wo eine solche neugefundene Methode vorzüglich verwendbar ist, und andere, wo sie mindere Dienste leistet. Nicht nur die einen, sondern auch die anderen sind aufzuzählen, damit man den Werth des Werkzeuges gründlich kennen lerne. Zum Repräsentanten eines jeden speciellen Falles nimmt man zweckmässig ein passendes Beispiel. Ich habe dies durchgeführt bei allen meinen Integrationsmethoden und habe so einer jeden den Kreis vorzüglicher Wirksamkeit zugewiesen. So ist es bei der Integration mit bestimmten Integralen ebenfalls geschehen und es liegt in der Natur der Sache, wenn einige der von mir gegebenen Beispiele von einer solchen Art sind, dass sie nur eine minder günstige Verwendung der Methode verstatten, was in meinem Werke auch jedesmal ausdrücklich bemerkt ist. Der wesentliche Nutzen eines solchen Beispieles ist dann, dass mit demselben jedesmal das Bedürfniss einer anderen passenden Methode an den Tag tritt, bis man deren so viele und mannigfaltige hat, dass sie für alle Fälle genügen. Solche Differentialgleichungen verstatten dann natürlich, wenigstens für specielle Zwecke eine vortheilhaftere Integration, und wenn sie auch Herrn Spitzer nicht gelingt, wie wir gesehen haben, so gelingt sie doch mir und einem jeden aufmerksamen Leser meines Werkes, und würde auch Herrn Spitzer gelingen, wenn er in meinem Werke über die Integration der Differentialgleichungen den Geist der Wissenschaft suchen würde. Auch er könnte z. B. geleitet durch Betrachtungen, wie die obangeführten, den Rechenstift in die

Hand nehmen und direct auf die vortheilhaftesten Reihen, die convergiren, wie $e^{bx}+e^{-bx}$ und $e^{bx}-e^{-bx}$, auf Grundlage der von mir aufgestellten Methoden losgehen. Wenige Minuten würden dann hinreichen, das folgende Integral als Rechnungsresultat aufzuzeichnen:

$$y=C\left[1+\frac{b^2x^2}{2(a+1)}+\frac{b^4x^4}{2.4(a+1)(a+3)}+\frac{b^6x^6}{2.4.6(a+1)(a+3)(a+5)}+\ldots\right]$$
$$+\frac{B}{x^{a-1}}\left[1-\frac{b^2x^2}{2(a-3)}+\frac{b^4x^4}{2.4(a-3)(a-5)}-\right.$$
$$\left.-\frac{b^6x^6}{2.4.6(a-3)(a-5)(a-6)}-\ldots\right]$$

Die Convergenz zu beweisen ist überflüssig, weil man nicht blos von derselben im Vorhinein überzeugt ist, sondern auch die Art derselben des Näheren kennt. Aber nicht nur in aufsteigender Reihenform, sondern vielmehr noch in anderen Formen vermag diese Gleichung integrirt zu werden, deren jede ihren besonderen Werth hat, und es wäre mir ein Leichtes, nicht nur über diese Gleichung, sondern noch über viele andere ganze Abhandlungen zu schreiben. Wer wird aber seine Kräfte an solchen Geringfügigkeiten vergeuden im Angesichte des unermesslichen, bisher noch unerforschten mathematischen Wissensgebietes, und hätte ich gethan wie Herr Spitzer zu wollen scheint, und wie er es auch gemacht hat, nämlich meine Methode auseinandersetzen, mit ihr anfangen und dann die zur Erläuterung dieser Methode gegebenen Beispiele integriren mit einer anderen, so hätte ich gehandelt, wie ein Neuling. Es soll jedoch in diesen Worten kein Tadel gegen Herrn Spitzer ausgesprochen werden, denn da unsere Zwecke verschieden sind, sind auch unsere Pflichten verschieden. Ich errichte nämlich ein grosses Lehrgebäude und muss daher auch die logischen Vorschriften beobachten; er hingegen macht nur Beispiele und braucht also keine Logik, diese ist vielmehr bei einem solchen Gewerbe hinderlich, er kann daher integriren, wie es ihm beliebt; ich dagegen kann dies nach einer bestimmten Methode nur dann thun, nachdem ich sie gründlich auseinandergesetzt und in allen ihren Zweigen ausgebildet habe. Ich konnte mithin logischer Weise nicht anderes thun, als ich gethan habe, und eben durch dieses logisch richtige Verfahren ist es mir gelungen, die Differentialgleichungen

mit veränderlichen Coëfficienten, die sonst der Schrecken der Analysten waren, zu den durchsichtigsten Gebilden zu machen. Wer in meinen Schriften gelehrt worden ist, sieht bei dem unmittelbaren Anblicke einer Differentialgleichung oft schon mehr, als der alte Analyst wusste, wenn er, vom Glücke in besonderer Weise begünstigt, ausnahmsweise wirklich zu integriren im Stande war und sein Integral auch wirklich vorliegen hatte; denn nicht eine, sondern mehrere verschiedene Grundformen des Integrales treten ihm oft schon in kühnen Umrissen geometrisch construirt vor die Augen des Geistes. Nicht selten weiss er so viel, als er braucht, ohne auch nur den Rechenstift anzurühren. Ist es nothwendig, sich das Integral wirklich bis in das kleinste Detail zu verschaffen, so ist ihm auch alsogleich die Form bekannt, in der die einzelnen Bestandtheile gruppenweise aufzufinden sind und die passenden Transformationen, um diese Auffindung vorzubereiten. Keine besondere Erscheinung in der Rechnung befremdet ihn; jede dient vielmehr dazu, die gesuchte Function in ihren Eigenschaften gründlicher zu enthüllen. Dies nenne ich Wissenschaft. Aber aus einem Aphorismengerümpel macht man keine solche. Sie steht ihm vielmehr feindlich gegenüber, denn gerade so wie ein Convergenzbeweis von Herrn Spitzer aufgehört hat eine akademische Arbeit zu sein, weil in Petzval's Werk die Convergenz aller solcher Reihen allgemein bewiesen und hiemit für ewige Zeiten abgethan ist, eben so hört auch die Integration einer Differentialgleichung, die sonst kein anderes Verdienst in der Wissenschaft hat, als dass sie sich von Herrn Spitzer integriren lässt, auf, eine akademische Arbeit zu sein, eben weil in demselben Werke das Integriren aller linearen Differentialgleichungen in zureichender Mannigfaltigkeit der Formen gelehrt wird.

Indem ich hiemit den Vorwurf der Mangelhaftigkeit, der meinem Werke von Herrn Spitzer gemacht wird, zurückweise, will ich durchaus nicht behaupten, dass es ohne alle Mängel sei, denn jedes Menschenwerk hat deren und der Verfasser kennt sie am besten. Ich suche sie auch nirgends zu verbergen, fordere vielmehr an mehreren Stellen meines Werkes jüngere Talente auf, über diejenigen Dinge nachzudenken, die zu erledigen durch 26jährige Bemühungen mir nicht gelungen war, z. B. einen Beweis der Nichtexistenz geschlossener allgemeiner Formeln für Differentialgleichungen, welche die erste Ordnung übersteigen, die Ausbildung der Theorie der algebrai-

schen und transcendenten Gleichungen, denn diese sind es hauptsächlich, die die Wirksamkeit meiner Integrationsmethoden auf dem Felde der physicalischen Wissenschaften als untergeordnete, aber einstweilen zu wenig bekannte Rechnengebilde noch beschränken. Meine Aufforderungen sind nicht ohne Erfolg geblieben, denn in Bezug auf algebraische Gleichungen ist ein grosser und edler Wissensschatz, der durch den zu frühen Tod Fourier's gänzlich verloren gegangen war, durch die Bemühungen Heger's wieder an das Tageslicht gefördert worden und während Herr Spitzer sich in nutzlosen mathematischen Aphorismen ergeht, richten einige edlere Talente schon seit Jahren ihr Augenmerk unablässig auf die transcendenten Gleichungen, um auch das letzte wesentliche Hinderniss zu beseitigen, das einer freien mathematisch-physicalischen Wissenschaftsforschung noch im Wege steht. Es gibt also schon noch Mängel und zwar nicht unbedeutende, sowohl in der Theorie der Differentialgleichungen, wie auch in den mit ihr in einigem Zusammenhange stehenden Hilfswissenschaften. Es fehlt noch eine Formenlehre für Differentialgleichungen mit Coëfficienten einer höheren Classe; es fehlt noch eine specifische Formenlehre für solche partielle Differentialgleichungen, die sich nicht auf eine oder mehrere gewöhnliche zurückführen lassen. Wer aber diese Lücken ausfüllen will, muss ein beharrlicher, tiefer und scharfer Denker sein. Es gibt also Mängel und es sind auch bereits verdienstvolle Männer beschäftigt, ihnen abzuhelfen: Herr Spitzer war aber und ist auch nicht unter ihnen, denn trotz seiner unermüdlichen Beispielschreibsucht entfaltet er doch nur in der Mathematik eine Vielgeschäftigkeit, die mehr schadet als nützt.

Herr Spitzer spricht aber nicht nur von Mängeln, sondern auch von Unrichtigkeiten. Dieses Wort scheint allen denjenigen, die den Inhalt meines Werkes nicht kennen, etwas zu bedeuten, für die anderen aber, die diesen Inhalt kennen, hat es keinen rechten Sinn, und man kommt bald darauf, dass es hier nichts weiter, als einen *terme passioné* bedeuten soll, der lediglich dazu bestimmt ist, mich etwas zu ärgern, allein ich bin ein Ahalyst der Sprache, vorzugsweise der mathematischen, und für mich gibt es ebenso wenig einen *terme passioné*, wie für einen Naturkundigen ein ekelhaftes Thier, und sowie jener alles anatomisirt, so gehe auch ich diesem Worte auf den Leib, indem ich frage: Was will Herr Spitzer damit? Hat er vielleicht in meinem Werke Druckfehler entdeckt? Dies wäre aller-

dings dankenswerth, wenn auch nicht von besonderer Wichtigkeit. Ist vielleicht in meinem Werke irgendwo in einem Beispiele sogar ein Rechnenfehler vorhanden, den er aufgefunden? ich kann dies auch brauchen. Hier zwar nicht so sehr als anderswo. Ich stehe nämlich im Begriffe, den Druck meines optischen Werkes zu beginnen und da kommen Formeln darin vor, auf deren vollkommenen Fehlerfreiheit es ganz absonderlich ankommt, da sie dazu bestimmt sind, in Zahlen übersetzt zu werden und da der allergeringste Fehler, auch nur in einem einzigen Coëfficienten vorhanden, das Misslingen der danach ausgeführten optischen Combination zur Folge hat. Hier ist also die vollkommenste Fehlerfreiheit etwas sehr Wesentliches; in einem Werke jedoch ganz formell wissenschaftlichen Inhaltes, wie die Integration der Differentialgleichungen, ist ein Druck- oder Rechnenfehler von gar keinem Belange, weil ein solches Werk eigentlich nicht selber rechnet, sondern nur zeigt, wie man zu rechnen habe; es bietet mit andern Worten die Form, in die sich physicalische Wissenschaft giessen lässt. Sollte aber endlich Herr Spitzer logische Unrichtigkeiten meinen in den Methoden, so sage ich einfach: Diese Formenlehre, diese Transformations- und Integrationsmethoden sind einem kolossalen Gebirgszuge zu vergleichen, in dem sich die Massen gegenseitig unterstützen. Jede Methode steht so fest, wie das grosse Wiesbachhorn, und auch ein viel besserer Logiker als Herr Spitzer würde ihnen nichts anhaben können.

Indem ich hiemit meinen heutigen Vertheidigungsvortrag schliesse, nehme ich mir vor, in der Folge auf die Prioritäts-Ansprüche zurückzukommen, die Herr Spitzer zu Gunsten Laplace's sowohl, wie auch zu den seinigen zu erheben für gut findet.